



Mathematica at Science High School

2023 Wolfram Language Conference at Seoul

Hyeonjin Doh & Hyunchae Lee, Seoul Science High School

10 Nov. 2023 at Korea University

Outline

Mathematica Class at SSHS

- Mathematica Class
 - For Students
 - For Teacher
- Mathematica in Physics Class
- Mathematica in Student Research



서울과학고등학교 Mathematica 수업

Mathematica Classes at Seoul Science High School

- **고등학생**
 - 계절학기 : 2주 30시간.
 - 정규학기 : 15주 30시간.
- **중학생** : 영재원교육을 통한 2~3시간 Online Lecture
- **교사** : 교원학습공동체 : 30시간.

영재원의 Mathematica 교육

Mathematica Classes at Seoul Science High School

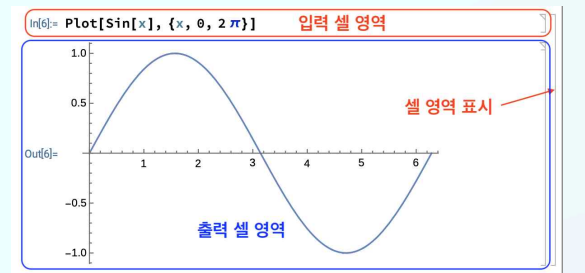
- 대상
중2, 3학년

- 자원
Mathematica Online

- 형식
2~3 hour Online Lecture

- 수업내용
 - 기호계산
 - 수식의 인수분해와 전개
 - 방정식 풀기
- 시각화
 - 2차원, 3차원 그래프 그리기
 - 애니메이션
 - Manipulate

다. 예) Plot, Pi, Cos, Draw
 • 함수의 괄호는 모두 대괄호([,])를 사용한다.
 예) Cos[x], Sin[x]
 • 목록, 변수의 범위의 경우 모두 중괄호({, })를 사용한다.
 예) Plot[Sin[x], {x, 0, 2π}]
 • 배열의 참조는 대괄호를 두 개 사용한다. 예) a[[3]], mylist[[5]][[2]]
 • 셀 단위로 실행하며, 셀은 [그림17]과 같이 오른쪽에 있는 각괄호가 감싼 영역을 말하며, "In[n]:" 시작하는 것은 n번째 입력 셀이며, "Out[n]:"로 시작하는 부분은 n번째 출력 셀이다.
 • 계산을 실행하려면, 실행하고자 하는 입력 셀에 커서를 위치 시킨 후, 시프트키(shift key)를 누른 후 엔터키(enter key)를 입력한다. 계산이 진행되는 도중에는 오른쪽의 입력 셀 영역을 표시하는 회색 격인 라인이 굵게 변한다. 이때 한 번에 하나의 셀만 계산할 수 있다.
 • 변수에 값을 대입할 때는 "="을 쓰고, 같다는 것을 의미하는 하는 것은 "=="을 쓴다.
 예) "a=b" b의 값을 a에 넣어 줌.
 "a==b" a의 값과 b의 값이 같은 면 참(True), 다르면 거짓(False)
 • 기존의 변수를 초기화 시킬 필요가 있을 경우, "Clear["Global*"]:"를 입력합니다. Clear는 변수 값을 지우는 함수입니다.
 • 하나의 셀 안에 여러 계산을 넣을 때, 중간 계산 과정을 보이고 싶지 않으면 각 계산의 끝에 ";"을 붙인다.
 • 계산을 도중에 중단할 때는 "Alt+."를 입력한다.
 • 주석처리는 괄호와 별을 사용한다. 예) (* 이 안에 있는 것은 주석으로 실행되지 않습니다. *)



[그림17] Mathematica의 셀, 오른쪽의 연한 회색으로 격인 라인이 셀의 범위를 나타낸다.

4) 수식 입력
 • Mathematica Online판은 키보드 단축키로 수식 기호를 입력할 수 없다. 상단의 "Insert" 메뉴에서 Special Character를 선택한다.
 • Mathematica Desktop 버전에서 특수문자 입력에 대한 정보는 Mathematica 문서에서 찾아 볼 수 있다. 문서에서 "Notebook Documents & Presentation"를 클릭하여 "Mathematical Typesetting"을 선택한다.
 • 특수문자 입력은 esc키를 이용한다. esc를 누르면 : 기호가 생긴다. 여기에 아래 문자를 입력하고 다시 esc 키를 누르면 입력한 문자가 특수 문자로 바뀐다.

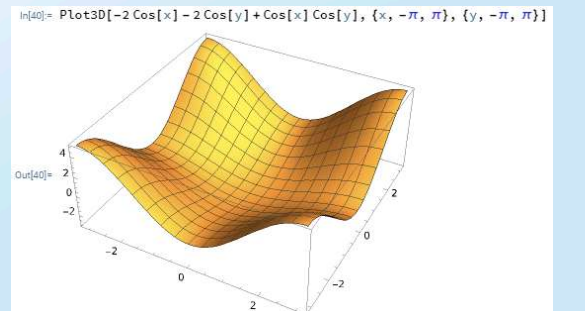
특수문자	α	β	π	\div	\in	∞	$^{\circ}$	\neq
esc +	a 또는 alpha	b 또는 beta	p 또는 pi	div	elem	inf	deg	!=

나. 학생탐구활동

- 수식 계산
 - 사칙연산
 - 계산기처럼 숫자와 연산 기호를 넣고, shift키와 엔터를 같이 누르면 결과가 계산되어 나온다.
 - 나누기는 약분한다.
 - 제곱근은 제곱에 해당하는 것만 제곱근 밖으로 빼 준다.

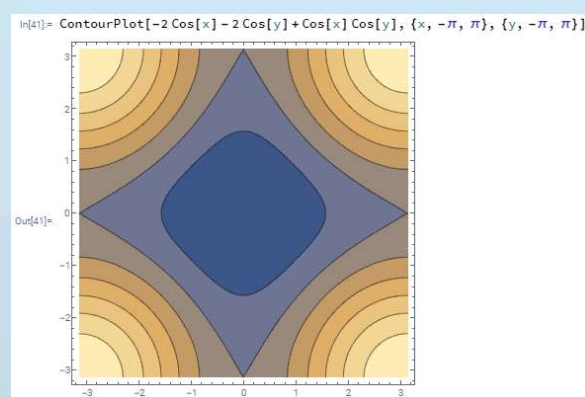
입력 셀에 수식을 넣고 shift키와 enter키를 누른다.	내용
In[1]= 35 * 56 Out[1]= 91	더하기
In[1]= 345 * 841 Out[1]= 290 145	곱하기
In[1]= 126 / 32 Out[1]= 63 / 16	나누기는 약분만 해준다.
In[1]= 3 / 5 - 1 / 6 Out[1]= 13 / 30	분수 계산은 통분해서 해준다.
In[1]= π / 3 Out[1]= π / 3	π는 계산하지 않고 그대로 나온다.
In[1]= √98 Out[1]= 7√2	제곱근은 제곱 성분만 빼 준다.

[변수2, 변수2의 범위]. 옵션
 - 옵션 : PlotPoints, PlotStyle, PlotLabel, AxesLabel



[그림21] $f(x,y) = -2\cos x - 2\cos y + \cos x \cos y$ 를 $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ 에 대한 그래프

- ContourPlot을 이용한 등고선 그래프
 - 형식 : Plot3D와 기본적으로 같음. ContourPlot[2개 변수의 함수, {변수1, 변수1의 범위}, {변수2, 변수2의 범위}, 옵션]
 - 옵션 : Contours



[그림22] $f(x,y) = -2\cos x - 2\cos y + \cos x \cos y$ 를 $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ 에 대한 등고선 그래프

- ParametricPlot3D를 이용한 그래프 : ParametricPlot의 3차원 버전. 매개 변수가 1개이면, 3차원 공간에 곡선을 그리고, 매개 변수가 2개이면, 3차원

서울과학고 대상 Mathematica 수업

Mathematica Classes at Seoul Science High School

- 대상 : 1,2,3학년
- 형식 : 30시간 수업
 - 계절학기 2주, 정규학기 15주
 - 기간 : 2017~2023, 계절학기 6회, 정규학기 1회
- 자원
15명 동시 사용 Network License.

수업내용

기호계산

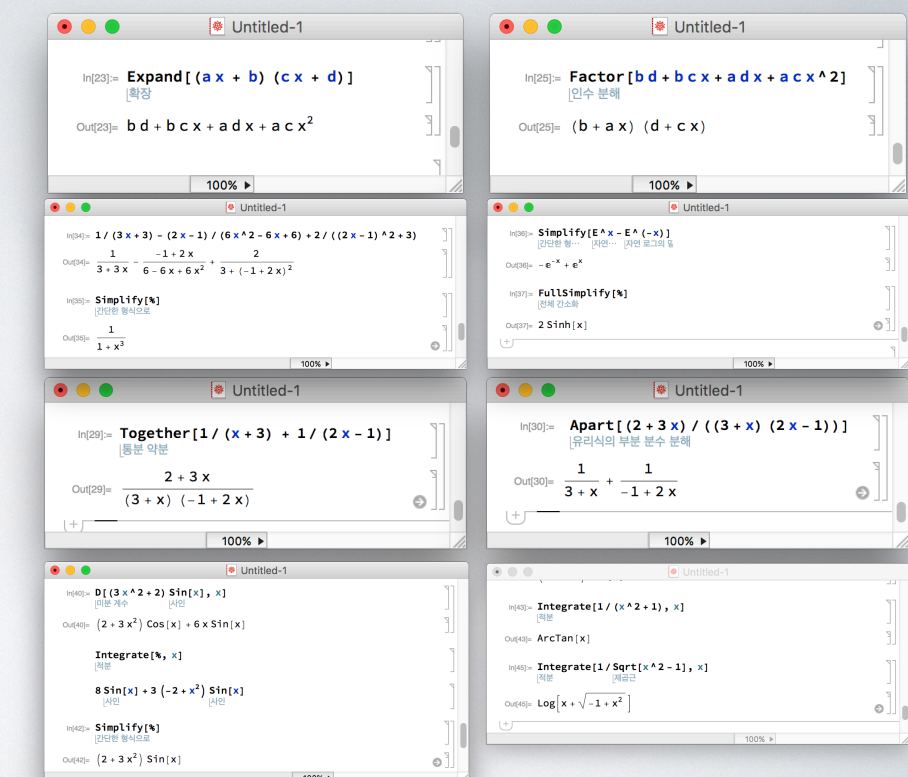
- 수식의 인수분해와 전개
- 방정식 풀기
- 미적분
- 벡터

시각화

- 2차원, 3차원 그래프 그리기
- 2차원, 3차원 그래픽 구현
- Animate & Manipulate
- Programming - 함수와 Module, Map, List..

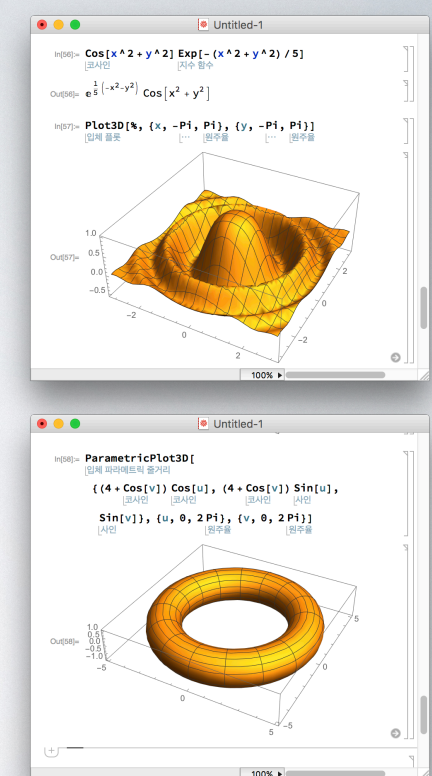
기호계산들

- Expand, Factor
전개와 인수분해
- Simplify, FullSimplify
마법의 명령어
- Together, Apart
분수의 통분, 분해.
- D, Integrate
미분과 적분



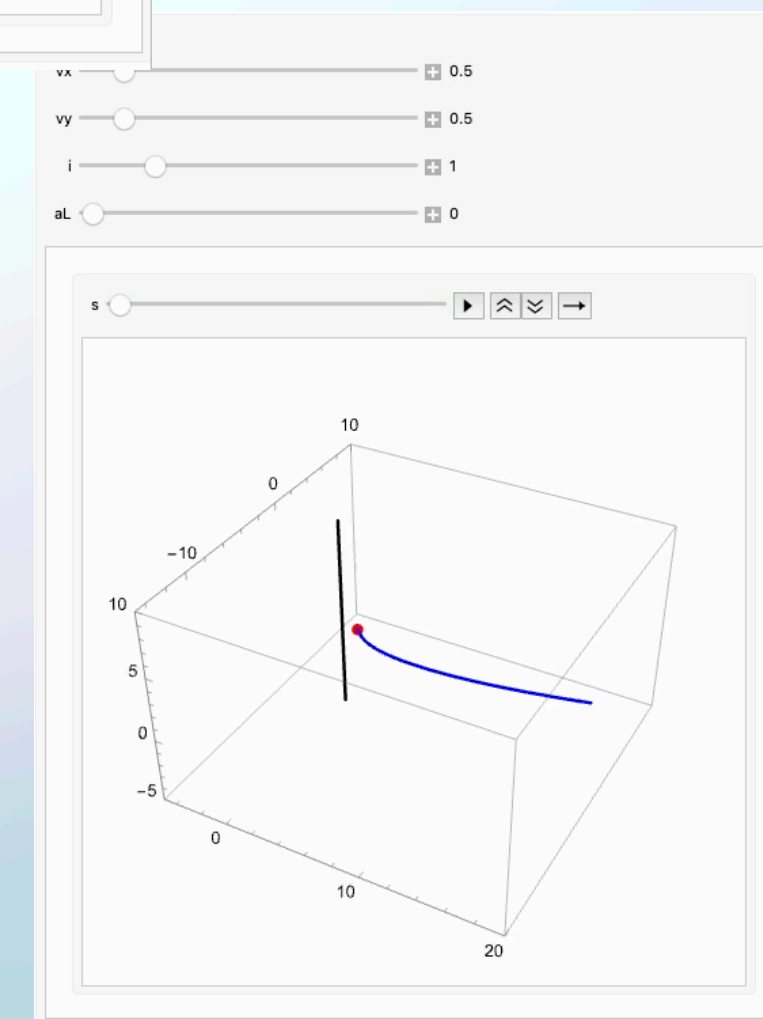
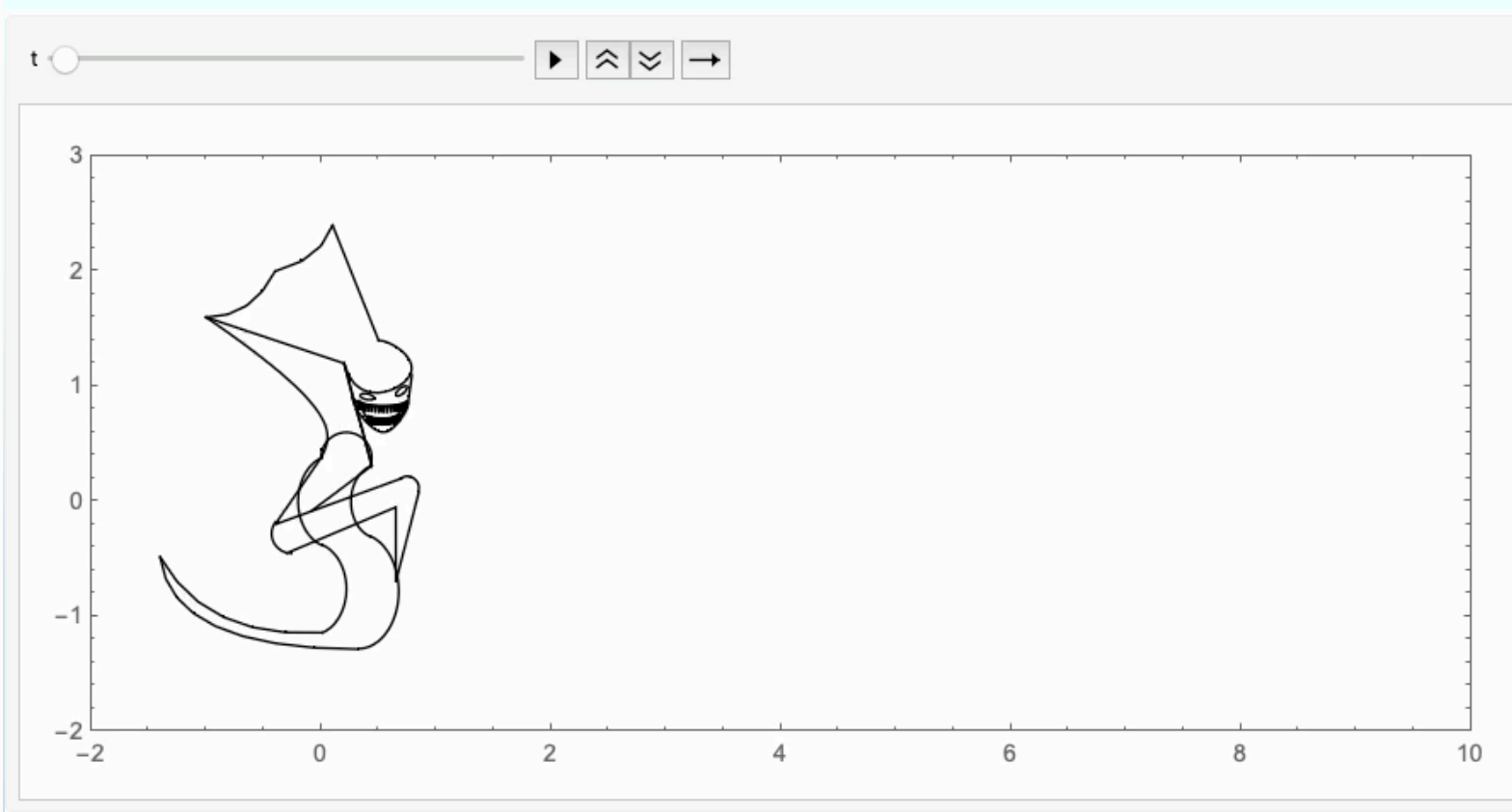
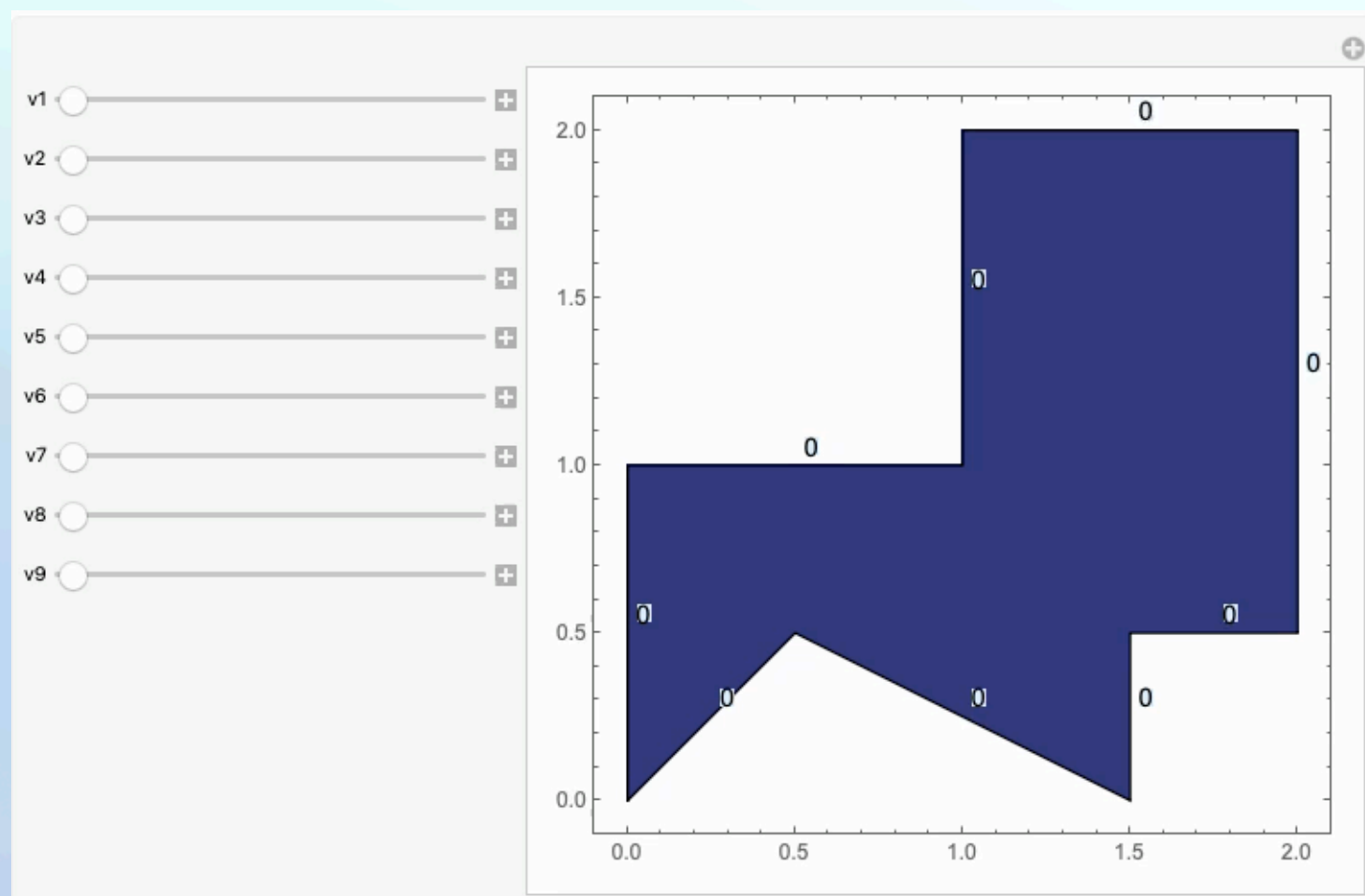
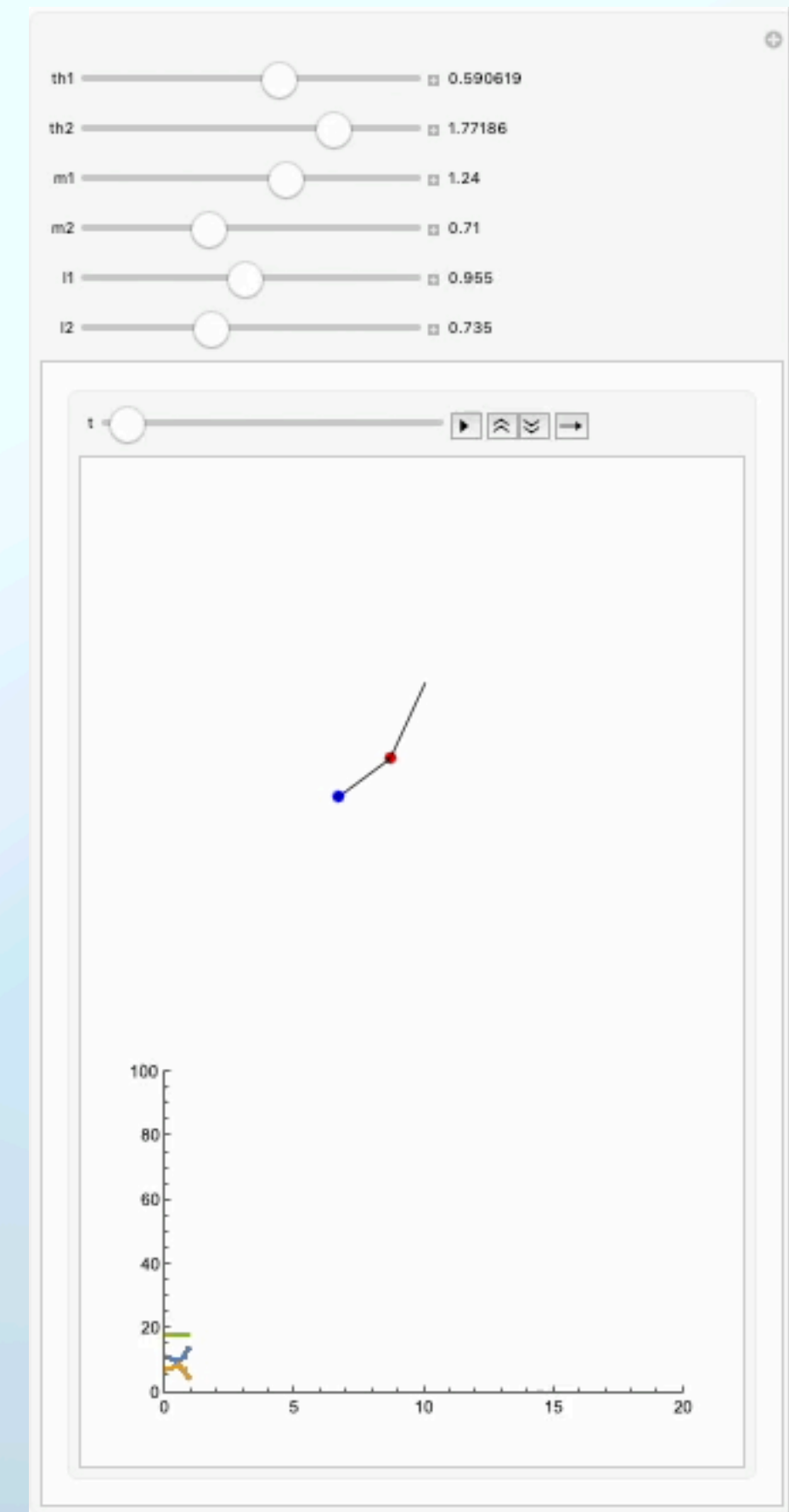
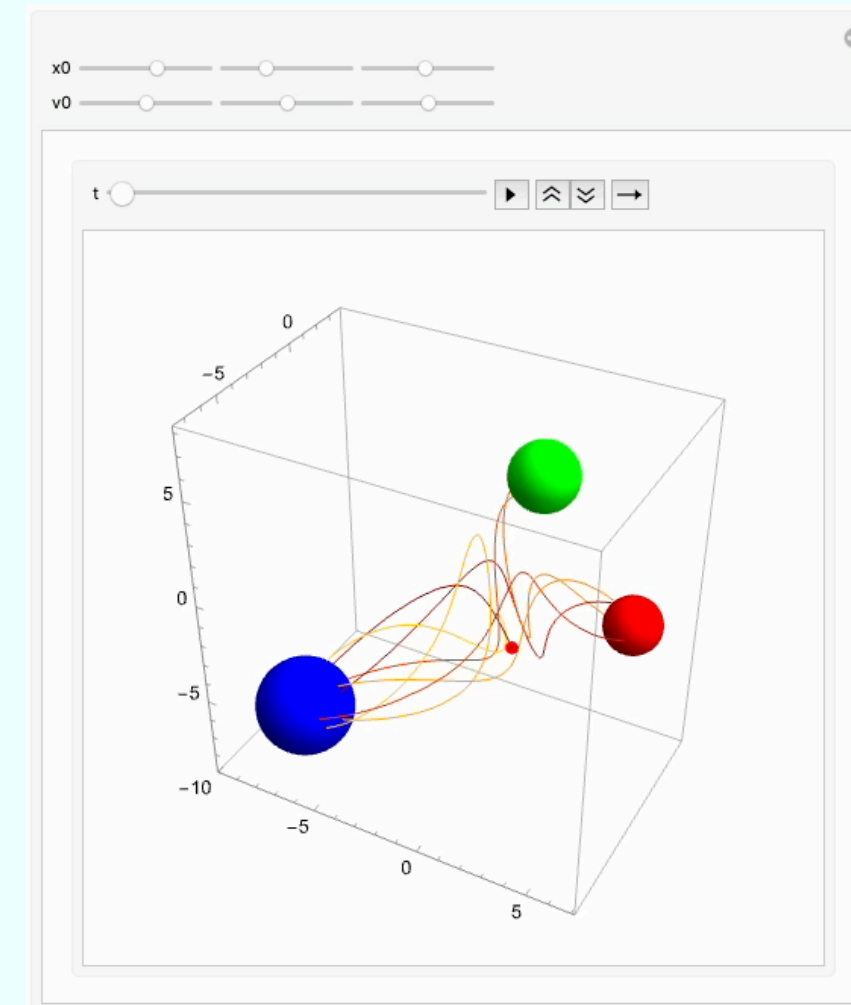
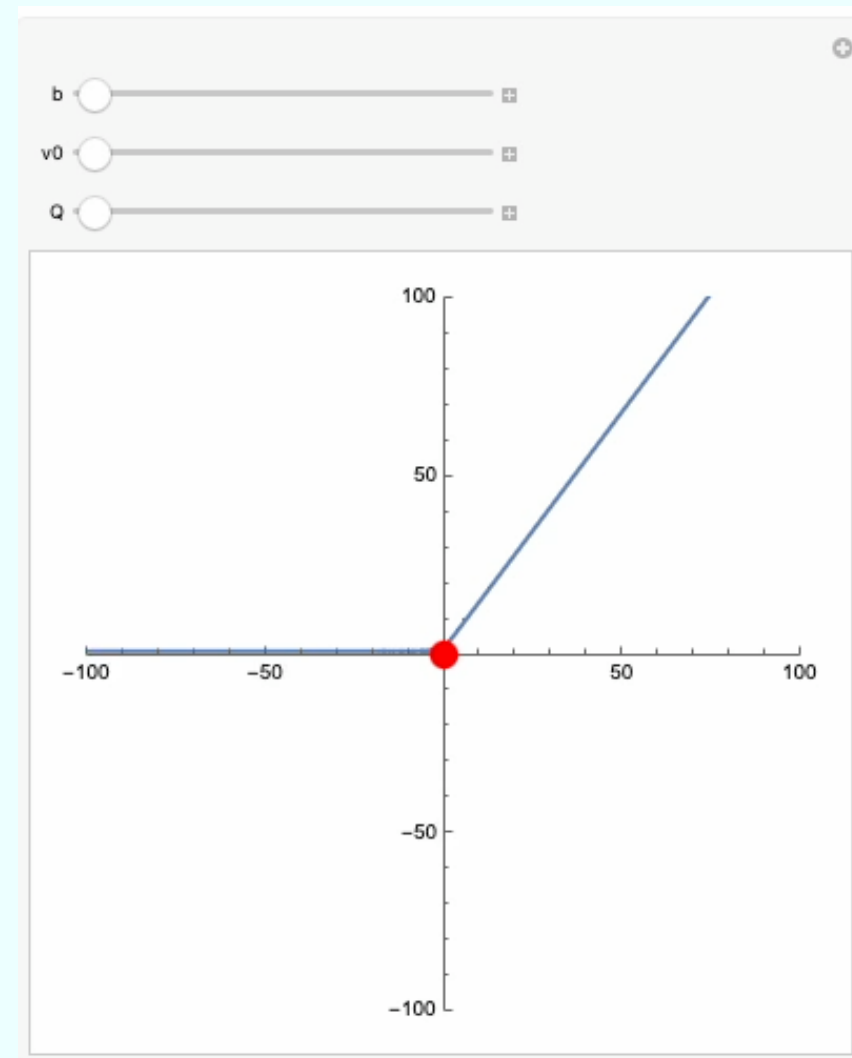
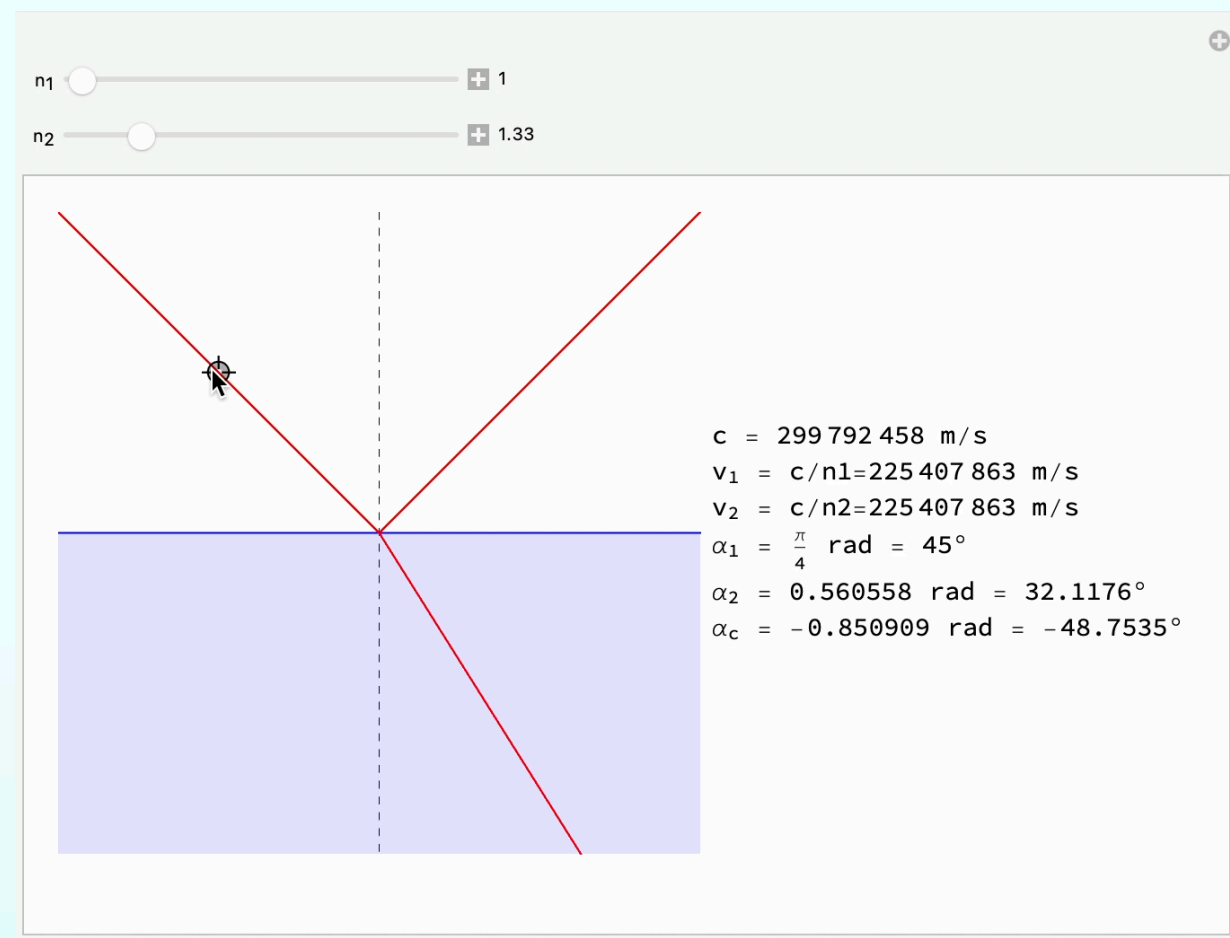
3차원 그래프 그리기

- Plot3D[func[x,y], {x, Xmin, Xmax}, {y, Ymin, Ymax}]
 x_{min} 부터 x_{max} 까지, y_{min} 부터 y_{max} 까지 func[x,y]를 3차원으로 그림.
- ParametricPlot3D[{fx[u,v],fy[u,v],fz[u,v]}, {u, Umin, Umax}, {v, Vmin, Vmax}]
- DensityPlot[func[x,y], {x, Xmin, Xmax}, {y, Ymin, Ymax}]
밀도 그래프
 - 다음을 실행해 보시오.
DensityPlot[Cos[x^2 + y^2] Exp[-(x^2 + y^2)/5], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]
- ContourPlot[func[x,y], {x, Xmin, Xmax}, {y, Ymin, Ymax}]
등고선 그래프
 - 다음을 실행해 보시오
ContourPlot[Sin[x^2 - y^2], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]



학생 수업 결과물

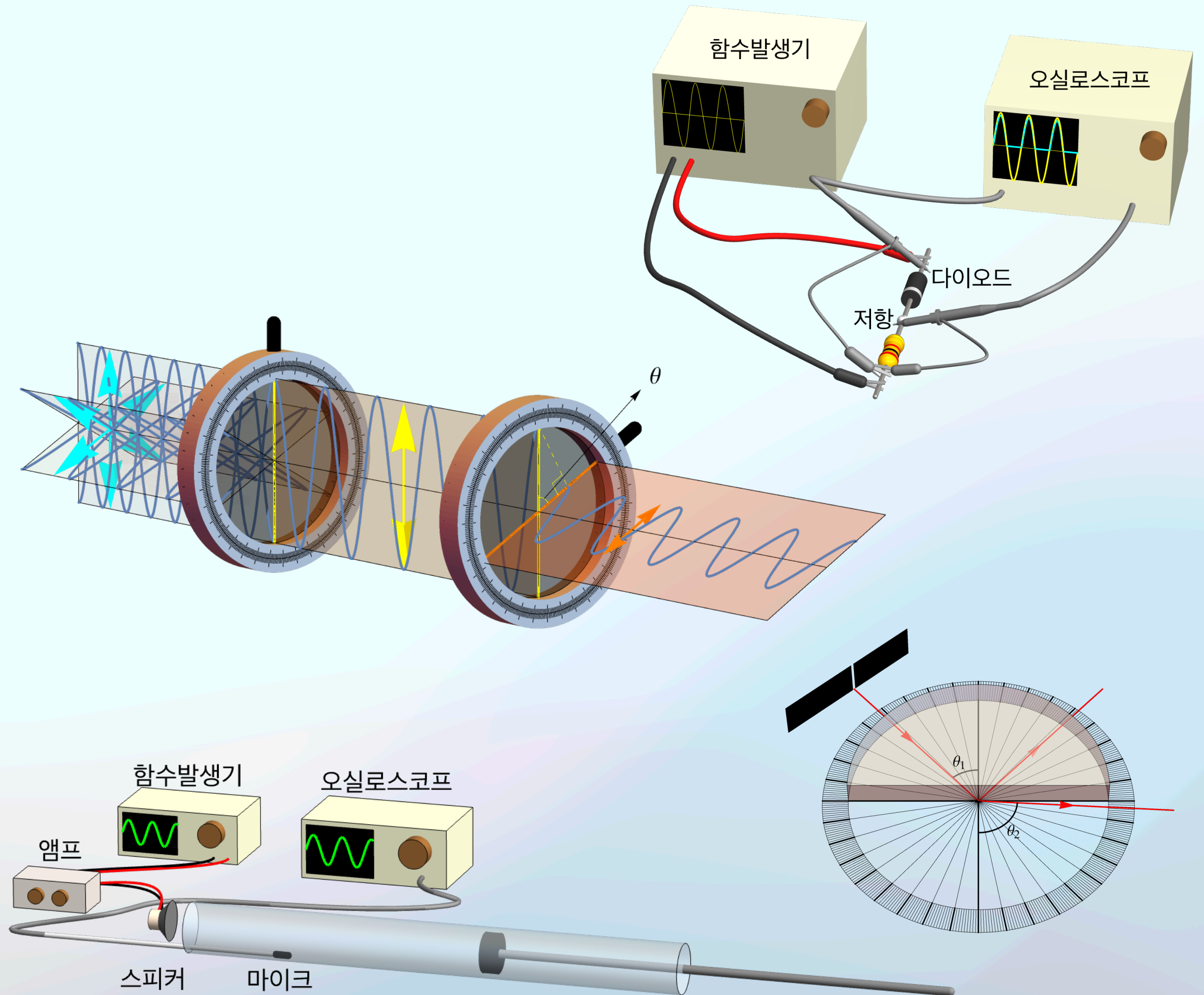
Mathematica Classes at Seoul Science High School



Mathematica를 활용한 물리 수업

Mathematica at Physics Classes

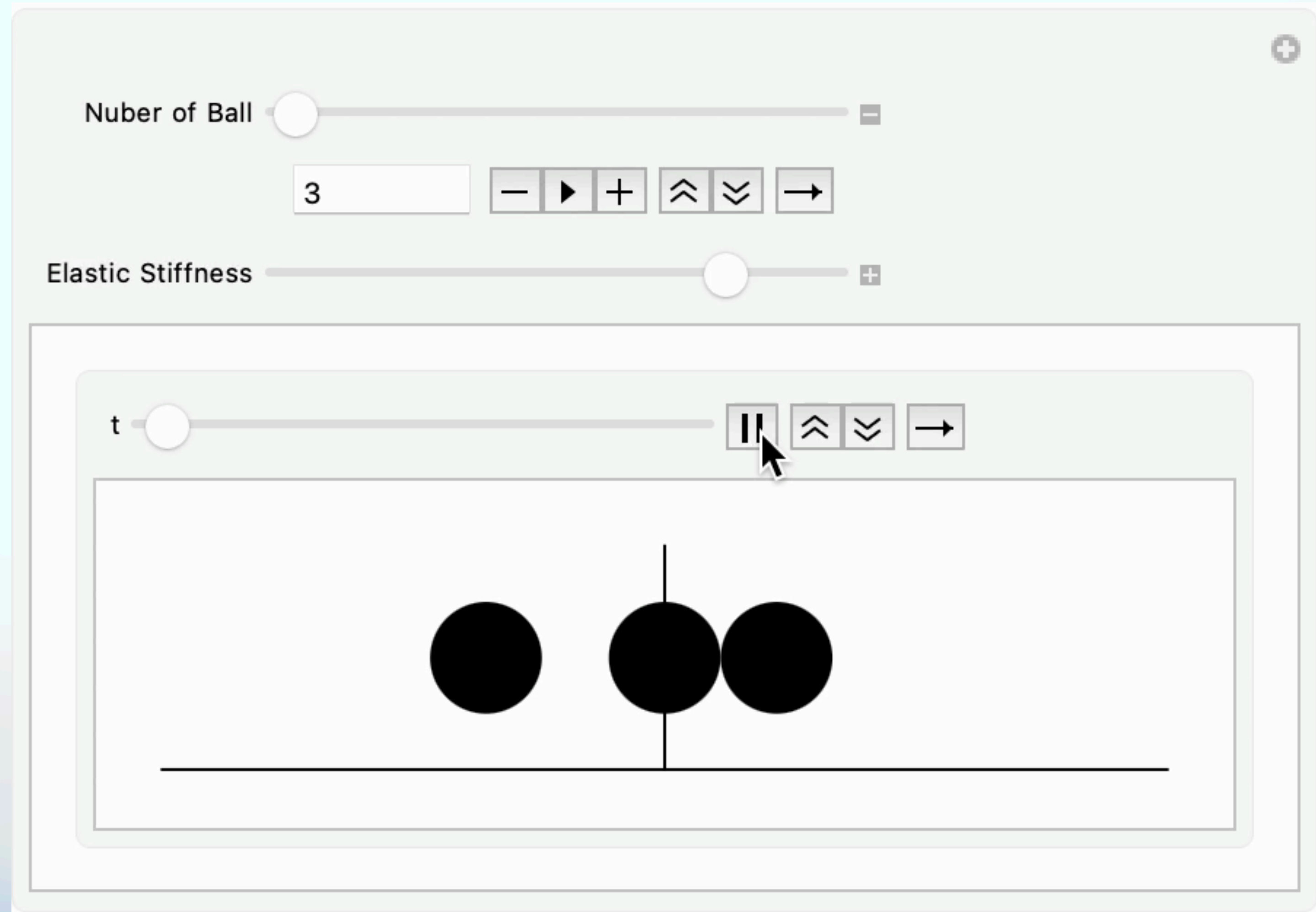
- 물리 시뮬레이션 구현
 - 수업시간에 완벽하게 제어된 실험을 구현하는 것은 어려움.
 - Mathematica의 경우 간단하게 물리 시뮬레이션을 구현할 수 있음.
- 추상적 개념의 시각화
- 교과서 그림



Mathematica를 활용한 물리 Simulation

Physics Simulation with Mathematica

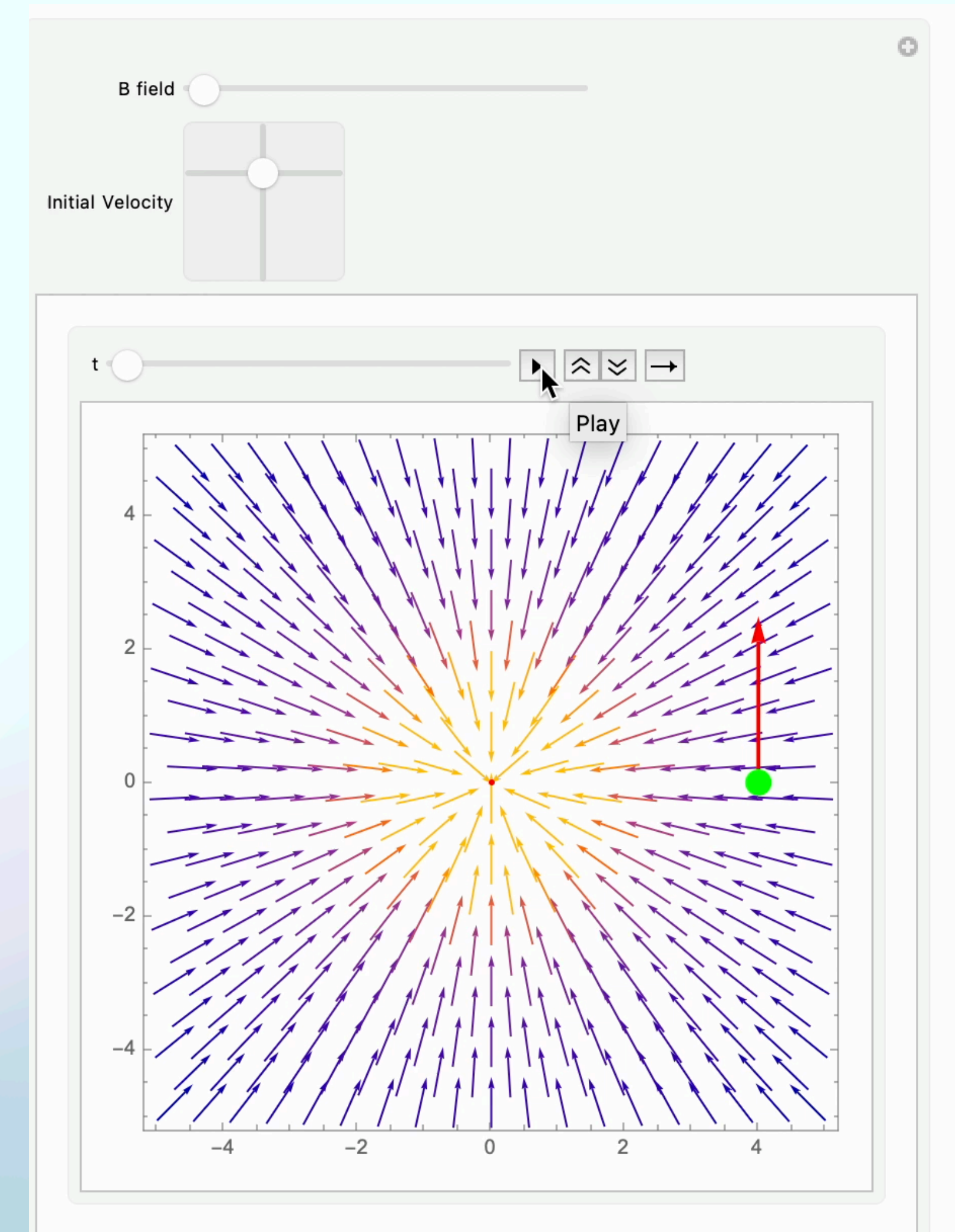
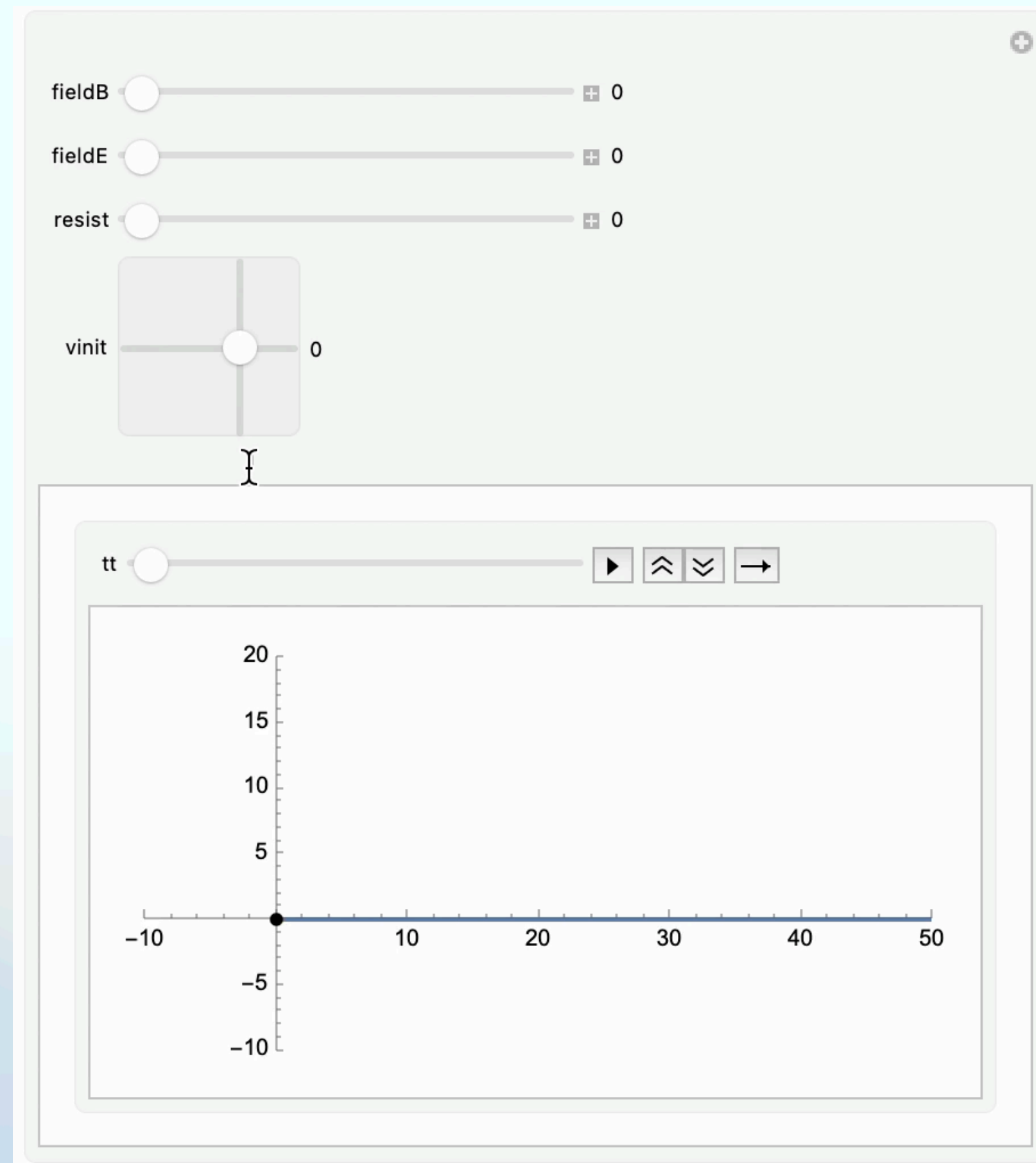
- 역학(Classical Mechanics)
- Newton's Cradle
- 공이 매우 딱딱한 경우만 중간이 공이 멈춰 있을 수 있음.
- NDSolve를 통해 구현.



Mathematica를 활용한 물리 Simulation

Physics Simulation with Mathematica

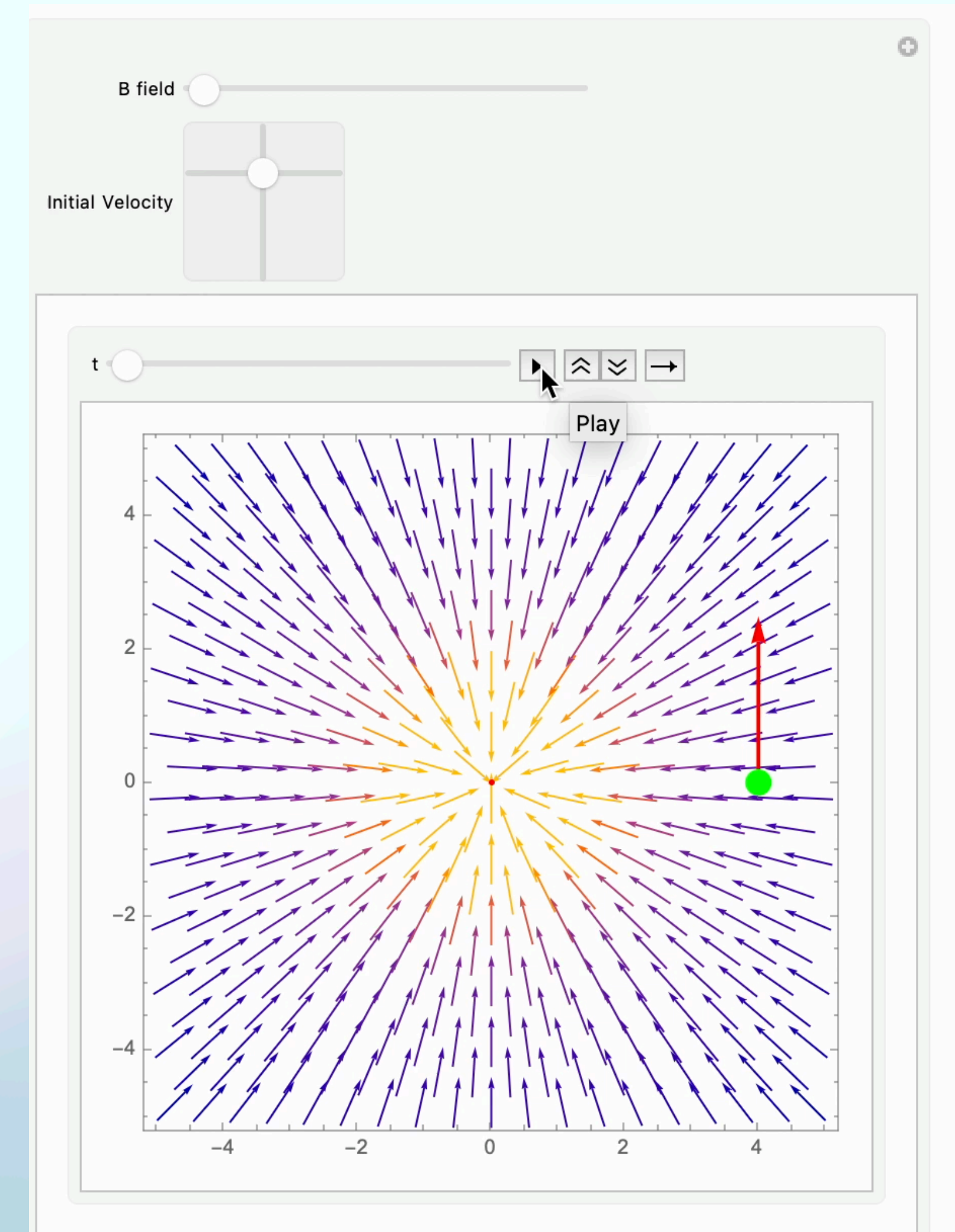
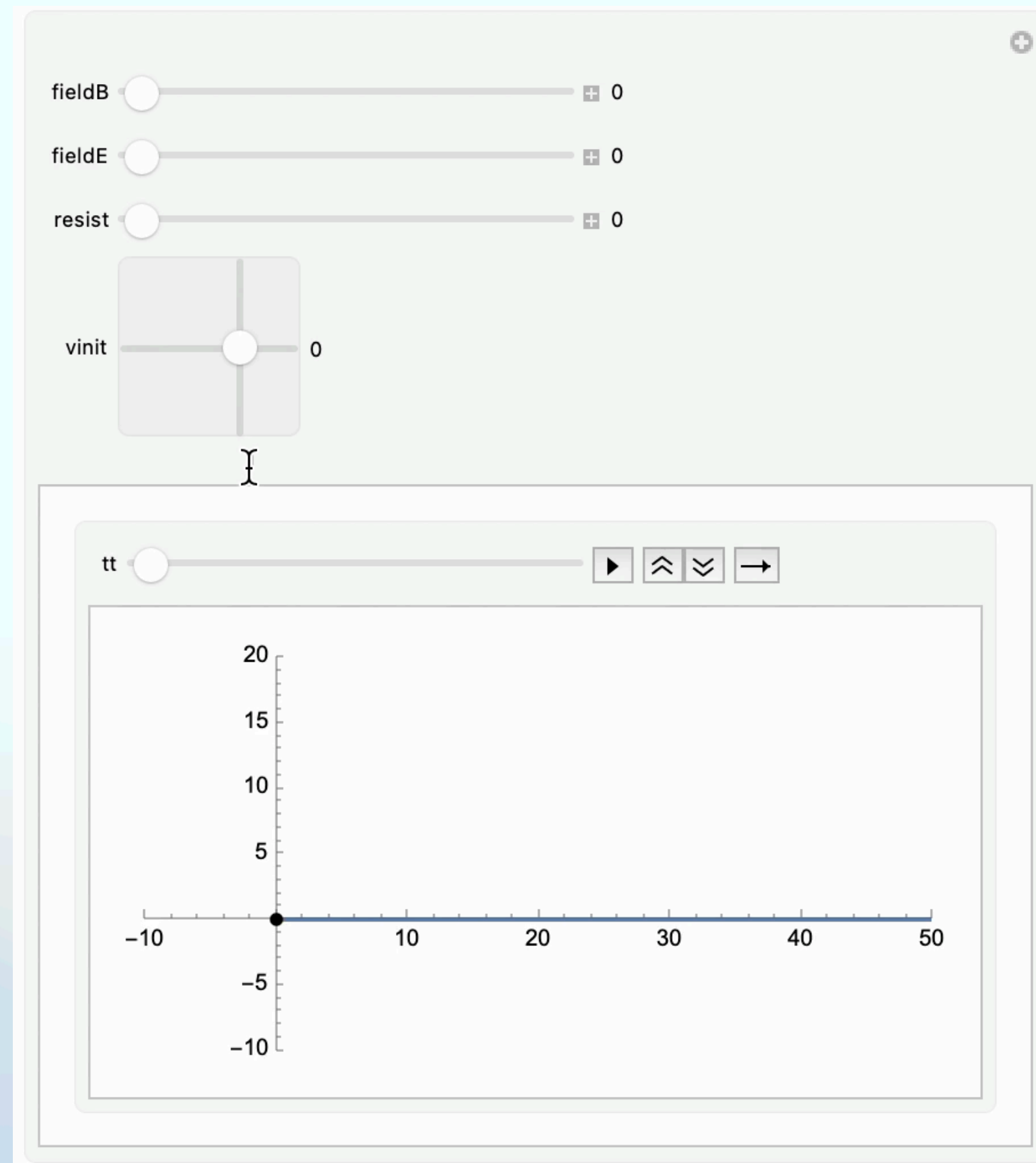
- 전자기학
(Electromagnetism)
 - 균일한 전기장과 자기장이 걸려 있는 경우.
 - 점전하에 의한 전기장과 균일한 자기장이 걸려 있는 경우.
 - NDSolve를 통해 구현.



Mathematica를 활용한 물리 Simulation

Physics Simulation with Mathematica

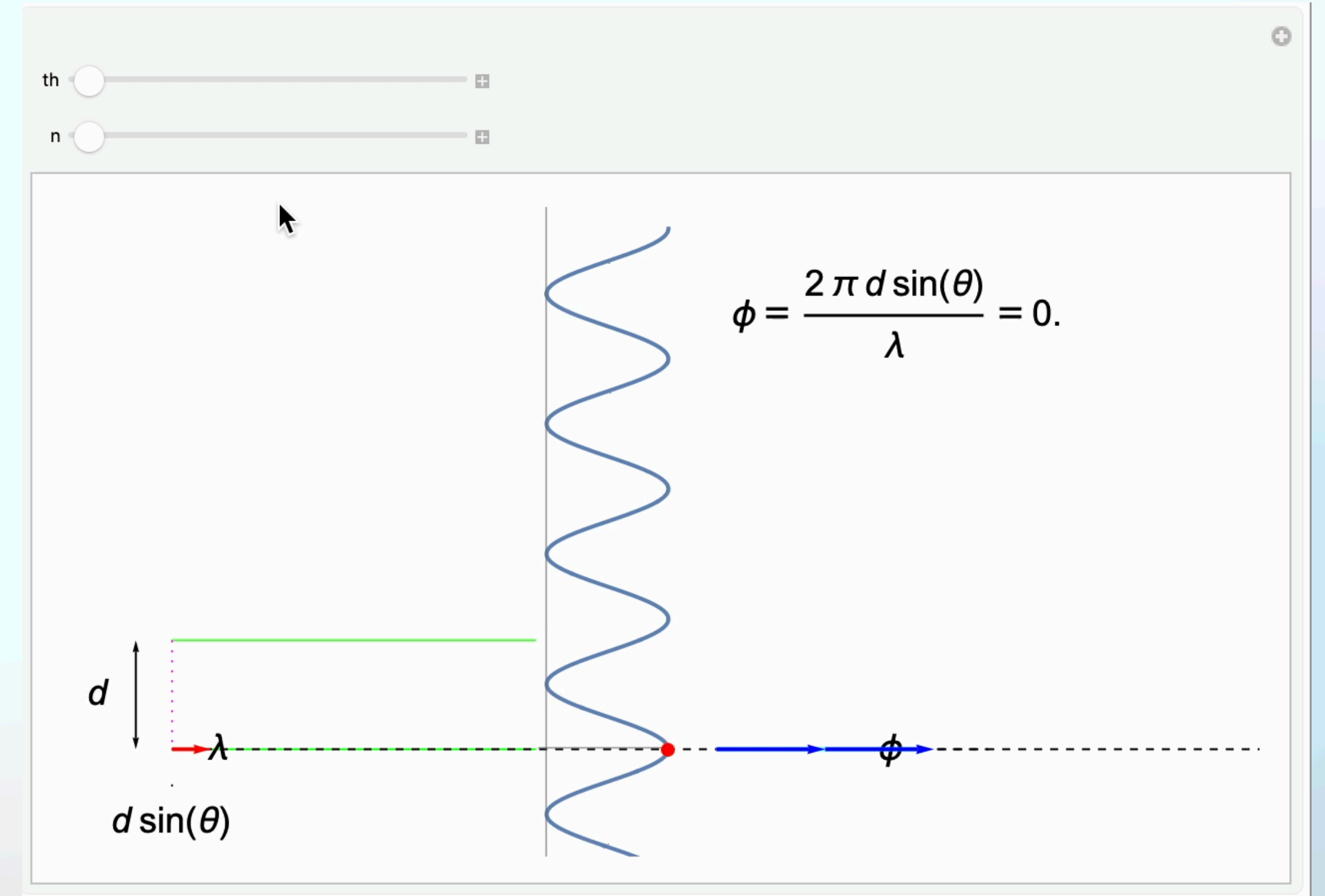
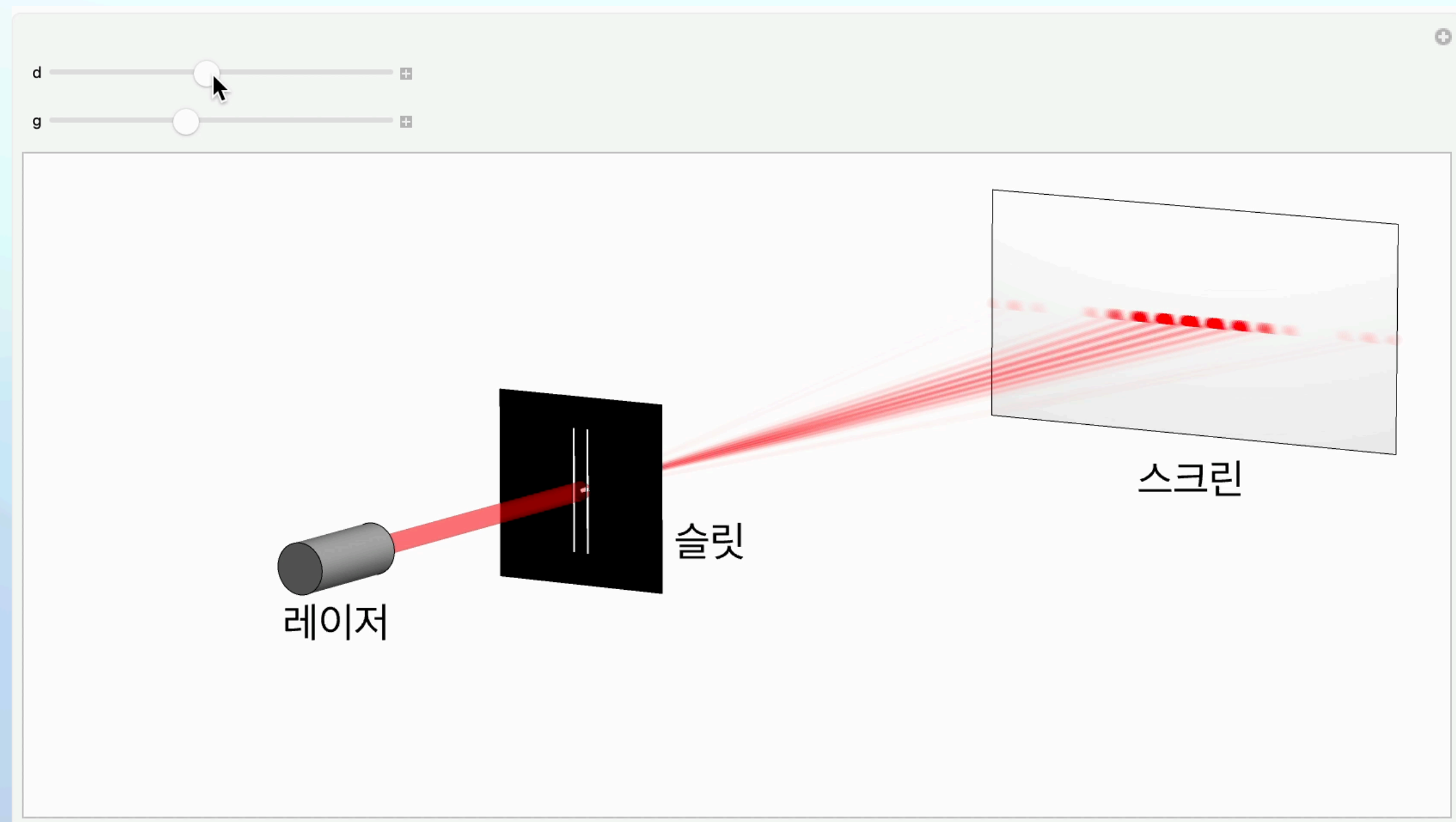
- 전자기학
(Electromagnetism)
 - 균일한 전기장과 자기장이 걸려 있는 경우.
 - 점전하에 의한 전기장과 균일한 자기장이 걸려 있는 경우.
 - NDSolve를 통해 구현.



Mathematica를 활용한 물리 Simulation

Physics Simulation with Mathematica

- 광학
 - Double Slit Experiment
 - Phasor Analysis



Mathematica 학생 연구 활용

Effects of the Coriolis force on the wave propagation

3차원 음파에서 코리올리 효과

→ 구한 해 시각화

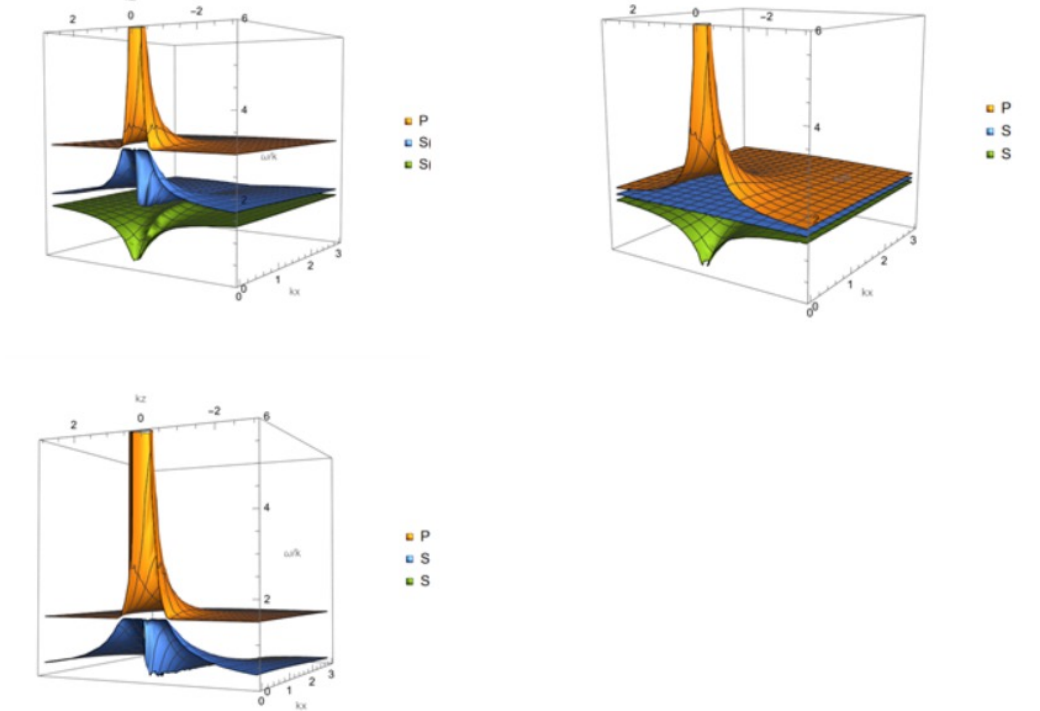


Fig 6. (1) $\Omega=0.5, c_t=1.5, c_l=3$ (2) $\Omega=0.5, c_t=1.5, c_l=1.5$ (3) $\Omega=0.5, c_t=0, c_l=1.5$ 일 때 k_x, k_z 에 대한 위상속도 ω/k 의 그래프

3차원 음파에서 코리올리 효과

→ S파 모드 두개의 위상속도/진동수 차이를 시각화

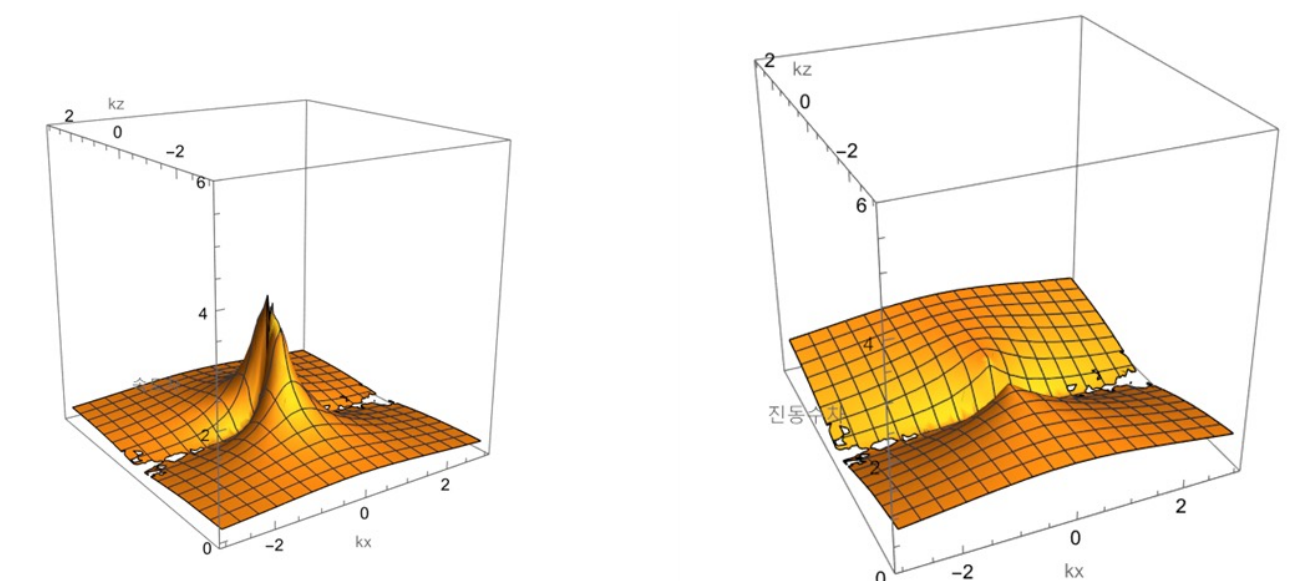


Fig 8. (1) $\Omega=0.5, c_t=1.5, c_l=3$ 일 때 두 모드의 속도 차 (2) $\Omega=0.5, c_t=1.5, c_l=3$ 일 때 두 모드의 진동수 차

3차원 음파에서 코리올리 효과

전반적으로 2차원 음파보다 흥미로움

1) 운동방정식: $\vec{s} = 2\vec{s} \times \vec{\Omega} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\nabla \cdot \vec{s}) + c_t^2 \nabla^2 \vec{s}$

2) 평면파 해 대입: $\vec{s} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)]$ (단, 자전축 방향이 z축)

→ 행렬 꼴로 정리:
$$\begin{pmatrix} \omega^2 - c_t^2 k_z^2 - c_l^2 k_x^2 & -2i\Omega\omega & -(c_l^2 - c_t^2)k_x k_z \\ 2i\Omega\omega & \omega^2 - c_t^2(k_x^2 + k_z^2) & 0 \\ -(c_l^2 - c_t^2)k_x k_z & 0 & \omega^2 - c_t^2 k_x^2 - c_l^2 k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

3) $\det=0$: 6차방정식. 해를 해석적으로 구할 수는 있음

Mathematica for Student Research

Research on the Edge state of Topological Insulator

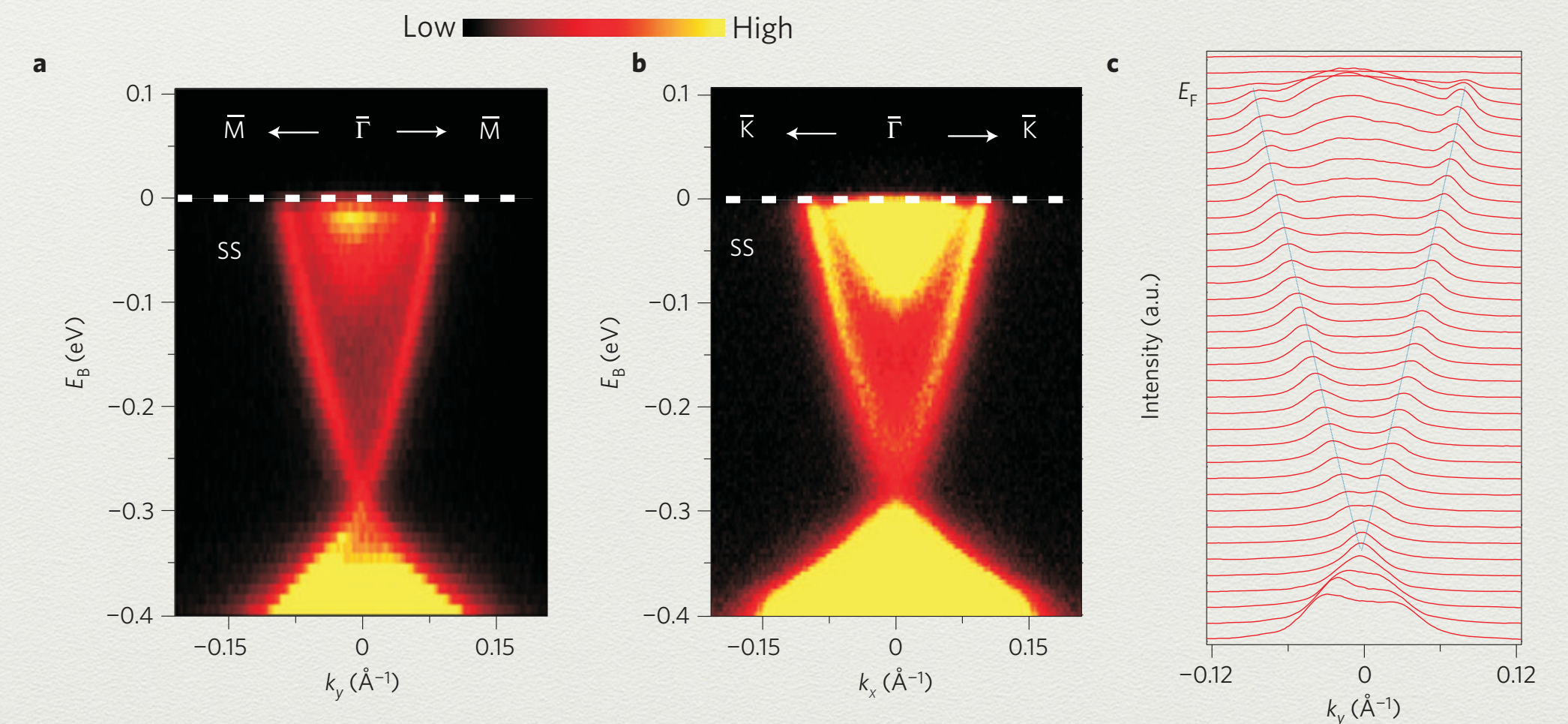
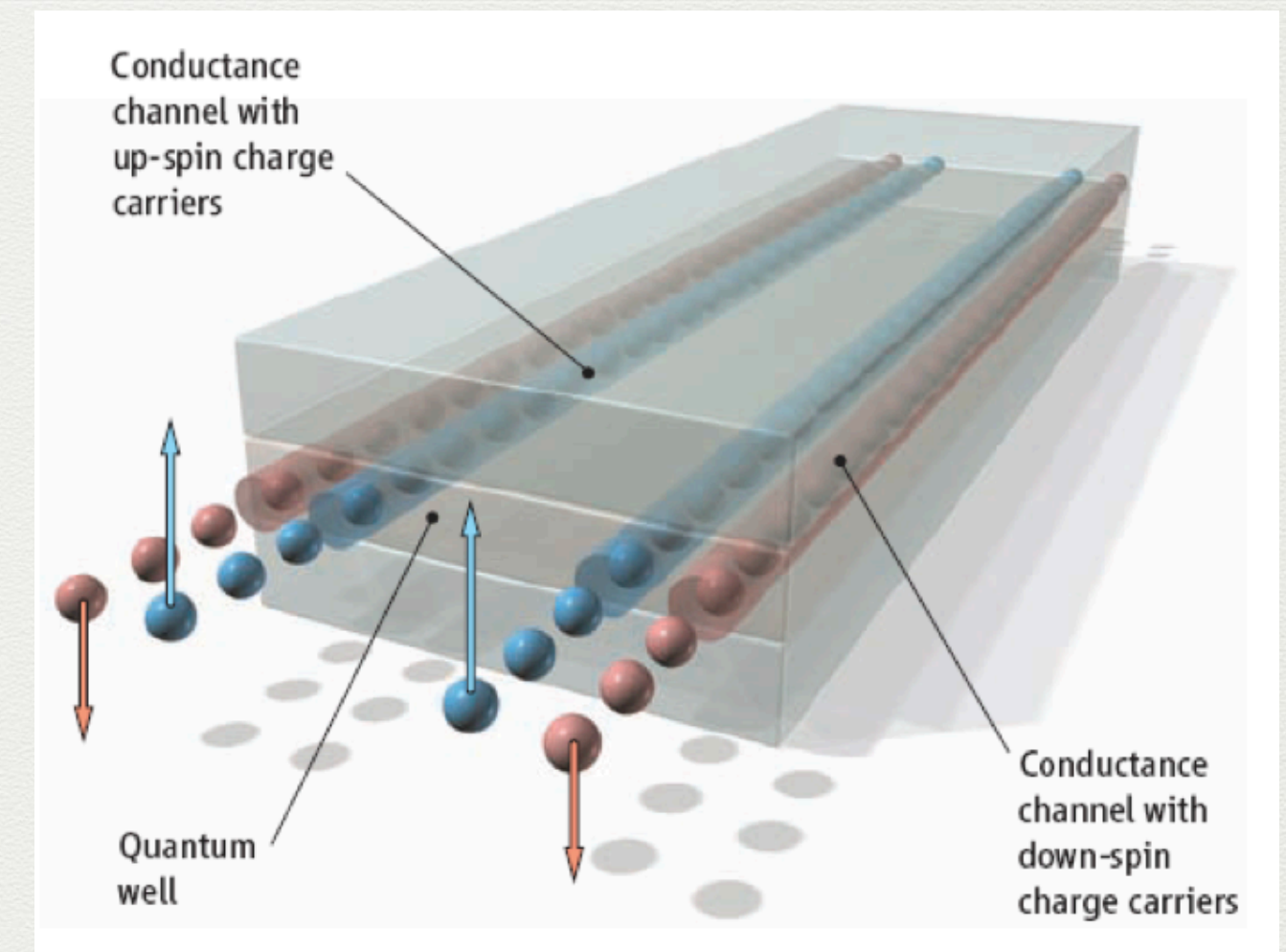
Hyunchae Lee (Seoul Science High School)

Usages of Mathematica

- Usages of Mathematica in Topological insulator research
- Diagonalizing Hamiltonian matrix
- Visualizing some physics with graphical tools

Introduction

- Topological Insulators: materials that have a bulk band gap like an ordinary insulator, but have protected conducting states on their edges or surfaces
- Insulator but metallic on surfaces or edges
- Could be studied with some lattice toy models

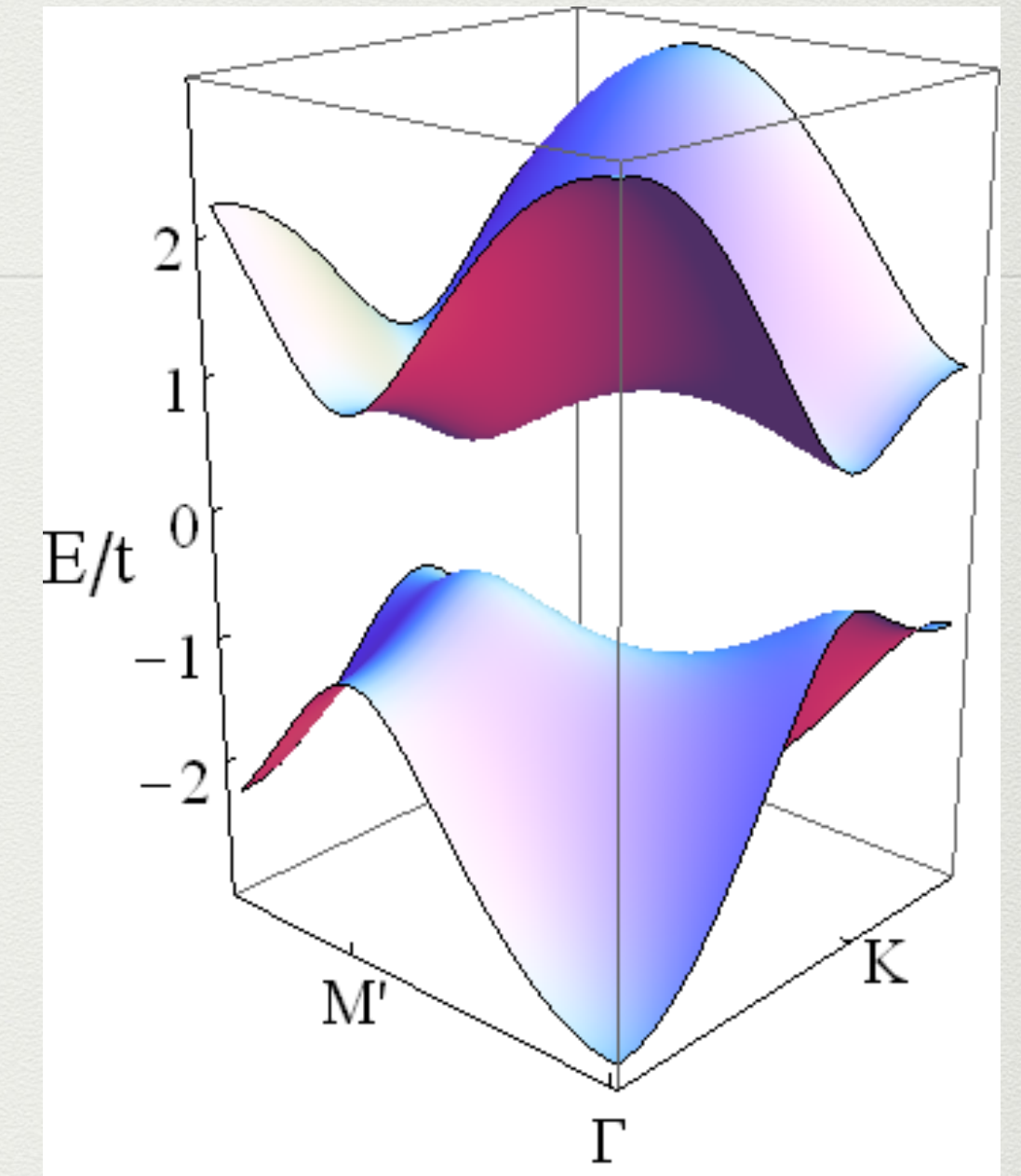


Xia *et al.*, Nat. Phys. 5 398 (2009)

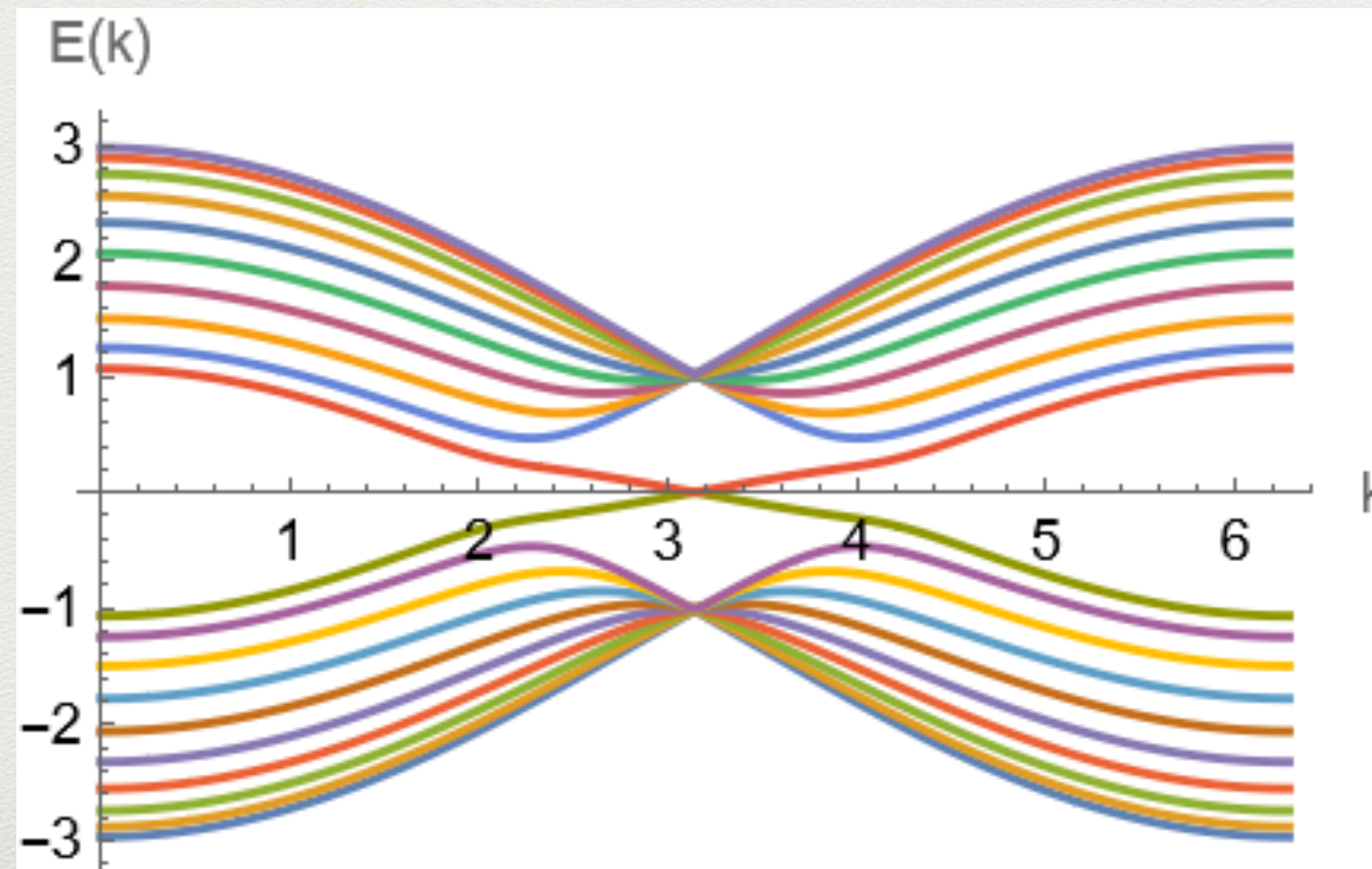
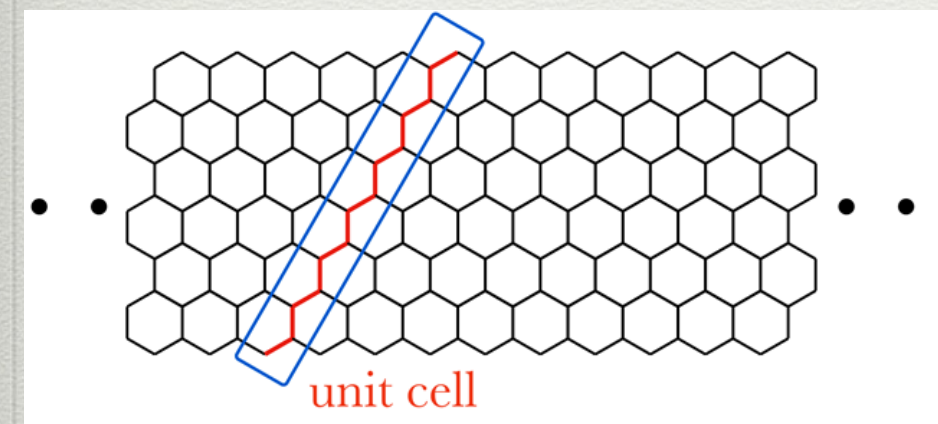
Energy Dispersion

- Kane-Mele Model is used
- By Fourier transform and Eigenvalues, Eigensystem, we could diagonalize Hamiltonian
- Dispersion relation : k vs $E(k)$
- plotting eigenvalues of $H(k)$ while varying k
- Used Plot, ListPlot

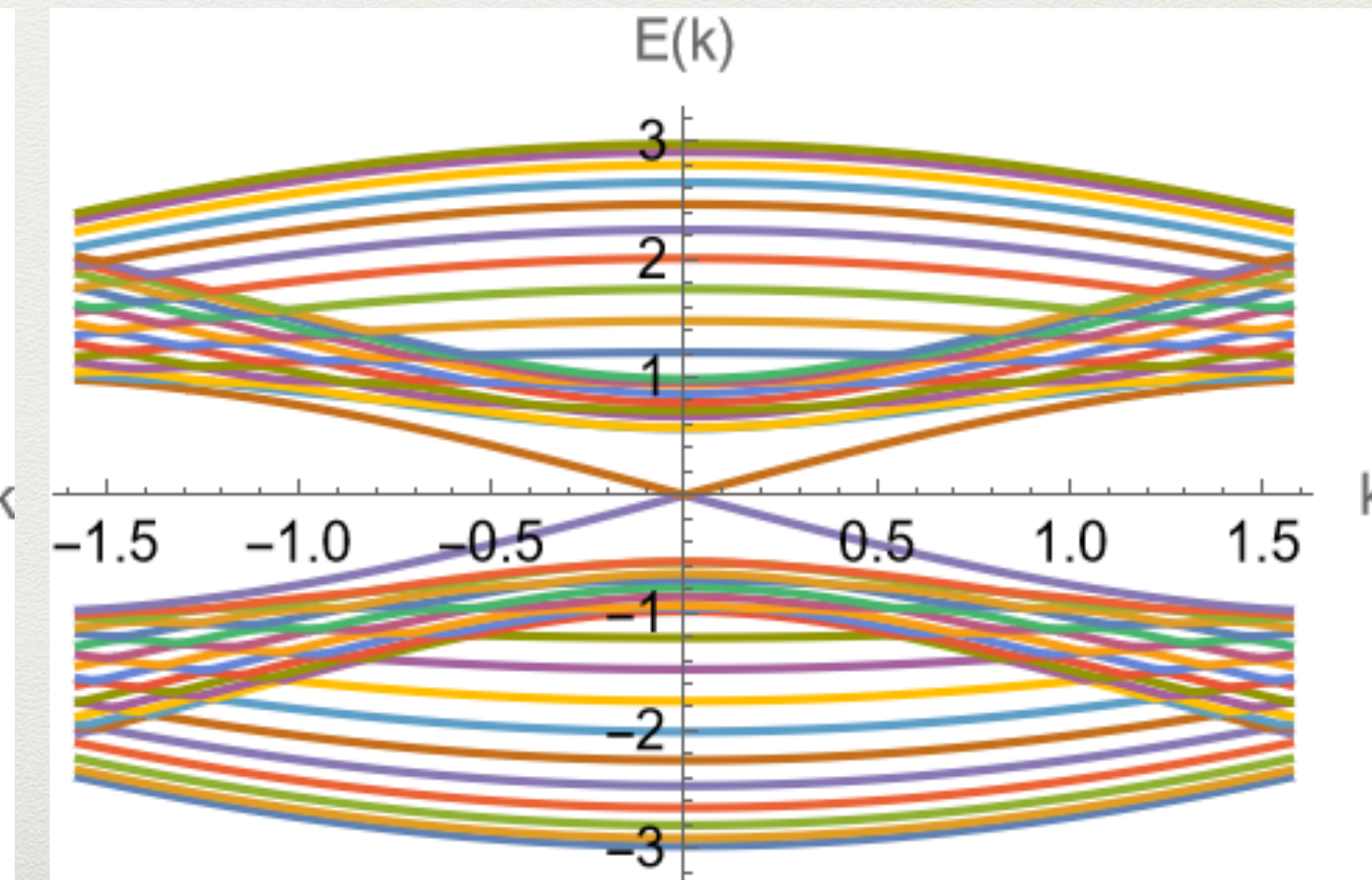
Bulk dispersion



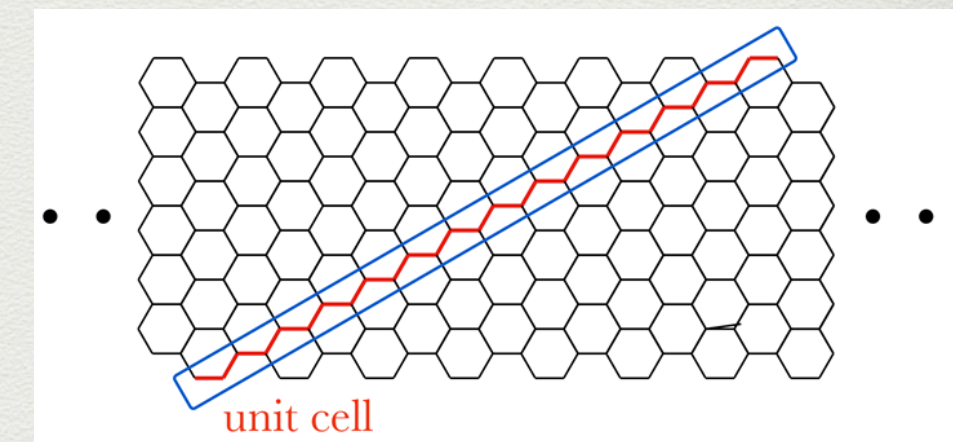
Zigzag Edge ←



$E(k)$

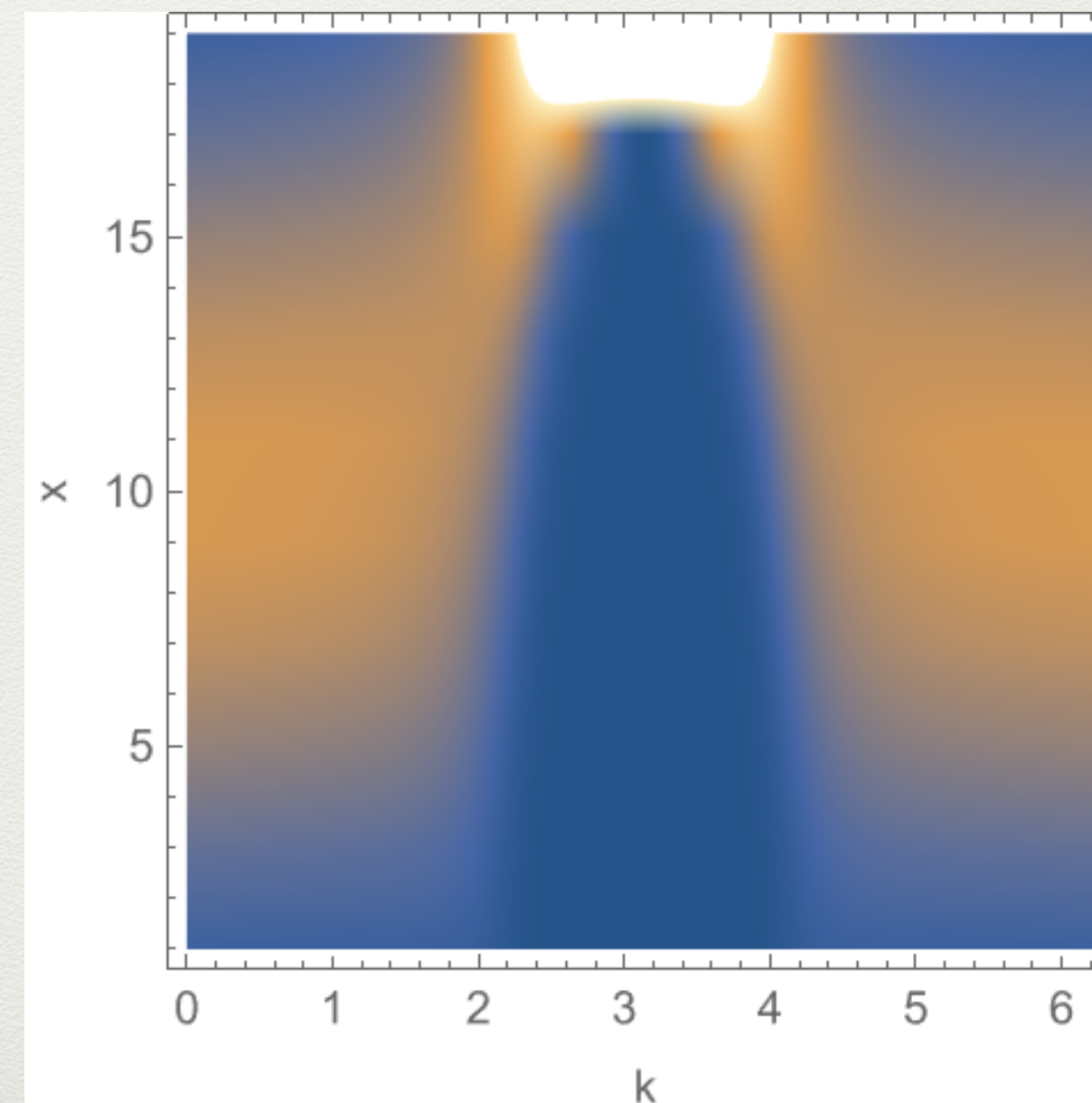
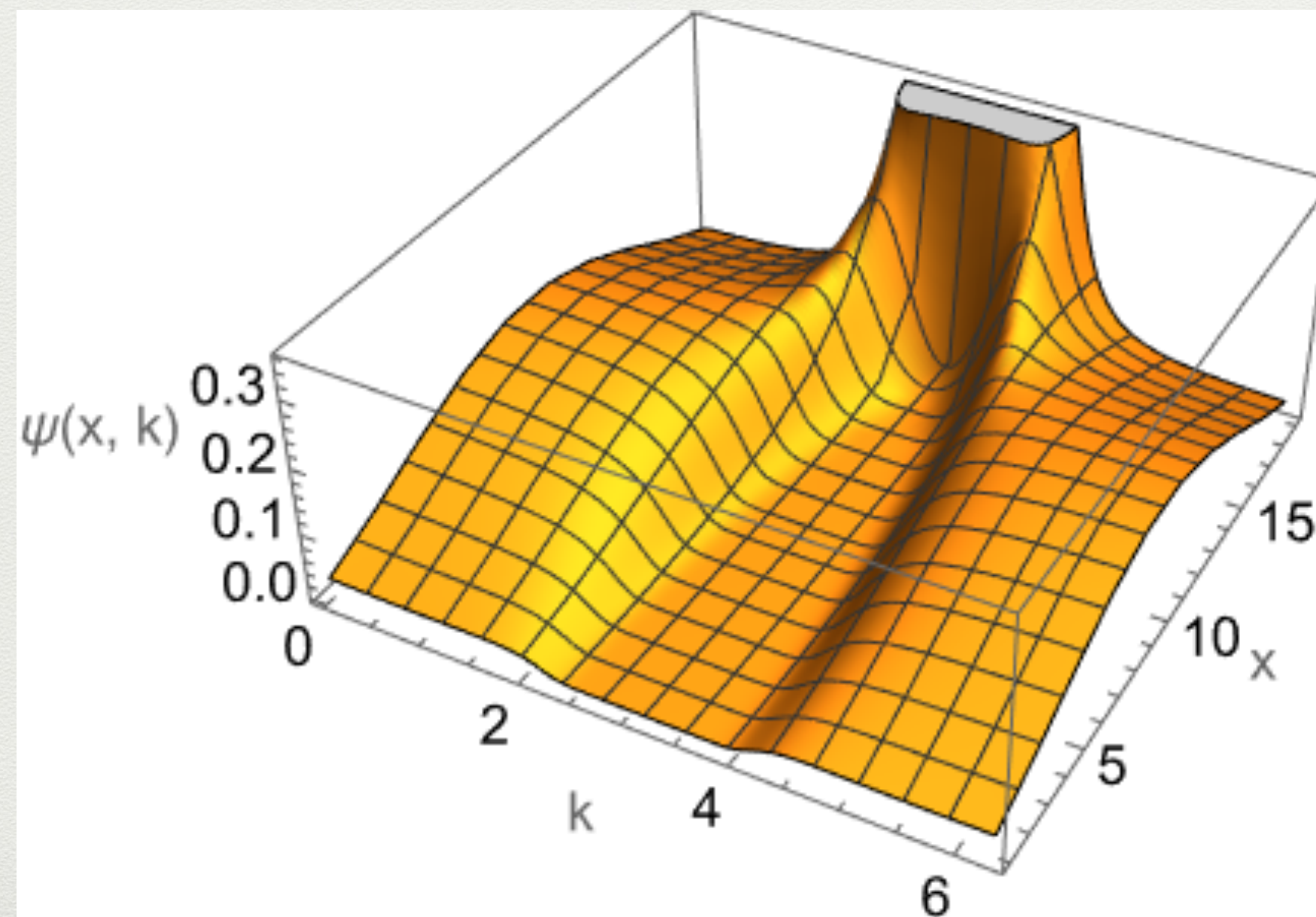


→ Armchair Edge



Visualization of Edge States

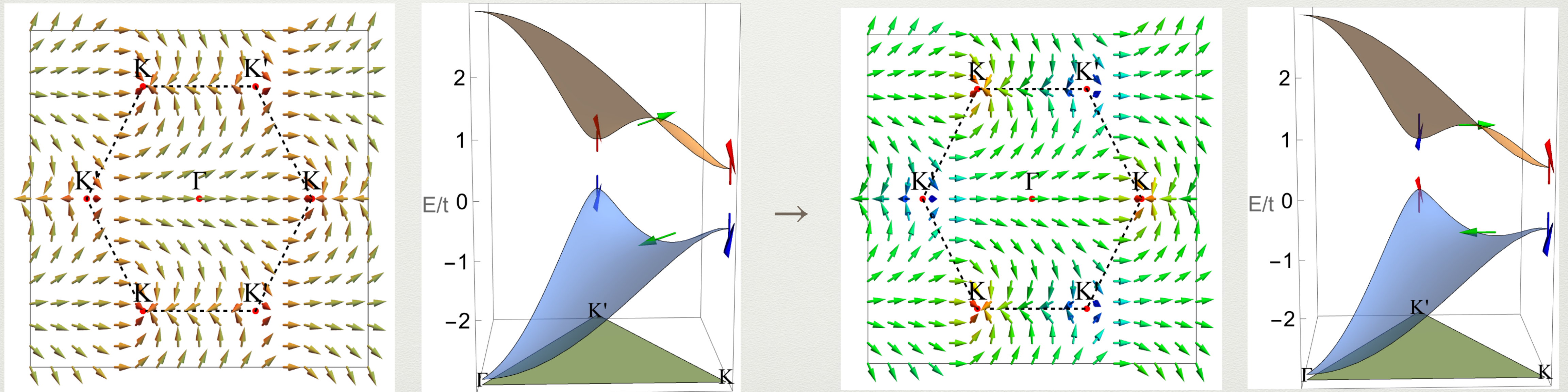
- Edge state: wave function which is localized in boundaries of lattice
- Plotting wave function $\psi(x, k)$ (2D) while varying k (+1D)
- Using `ListPlot3D`, `ListDensityPlot`



Non-trivial Topology

- By Plotting Pseudo-spin configuration in Brillouin zone, we could intuitively understand non-trivial topology.
- Using Arrow, Graphics3D

Topological Phase Transition



Summary

서울과학고등학교 Mathematica 교육

- 고등학생 대상 : 30시간 강의
 - 기호계산, 시각화, 프로그래밍,
- 중학생 대상 : 2~3시간 온라인 강의
 - 간단한 기호계산, 그래프 그리기
- 교사 대상 : 30시간 강의

Summary

서울과학고등학교 Mathematica 활용

- 수업에서의 활용
 - 물리 시뮬레이션
 - 추상적 개념의 시각화 도구
 - 교과서 삽화
- 학생 연구
 - 간단한 수치 해석적 해법 제공을 통한 문제해결력 증진.